Lemme de la grenouille

Théorème : Soit (E, d) un espace métrique compact et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E telle que l'on ait $\lim_{n\to+\infty} d(u_{n+1}) - d(u_n) = 0$. Alors l'ensemble Γ des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est connexe.

Application : Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$.

Preuve du théorème : Si $p \in \mathbb{N}$ on note $A_p = \{u_n : n \geq p\}$. On sait que $\Gamma = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{A_p}$, ainsi Γ est fermé comme intersection de fermés donc compact en tant que fermé dans un compact. Supposons par l'absurde que Γ n'est pas connexe. On peut alors écrire $\Gamma = A \cup B$ où A et B sont des fermés non vides d'intersection disjointe. Comme Γ est compact, A et B le sont aussi. On peut alors définir $\delta : \dfrac{d(A, B)}{3}$ qui est non nul (il y a toujours le théorème des bornes atteintes de manière sous-jacente, important d'en être conscient). On pose alors

$$A' = \{x \in E : d(x, A) < \delta\},\ B' = \{x \in E : d(x, B) < \delta\} \text{ et } K = E \setminus (A' \cup B').$$

Pour arriver à une contradiction on va montrer que l'on peut trouver une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans K, ce qui est absurde car $K \cap \Gamma = \emptyset$.
Par hypothèse on peut se donner N_0 tel que $d(u_{n+1}) - d(u_n) < \delta$ pour tout $n \geq N_0$. Soit maintenant $N \geq N_0$ et montrons qu'il existe $n_0 \geq N$ tel que $u_{n_0} \in K$. Donnons nous a et b respectivement pris dans A et B. Comme ce sont des valeurs d'adhérence il existe n_1, n_2 tels que $n_2 \geq n_1$ et

$$d(a, u_{n_1}) \leq \delta \text{ et } d(b, u_{n_2}) \leq \delta.$$

On pose $n_0 = \min\{n \geq n_1 : u_n \notin A'\}$. Ce nombre est bien définie car l'ensemble sur lequel on prend le min est une partie de $\mathbb{N}$ non vide (contient n_2 par exemple). Comme $n_0 \geq n_1 \geq N$ et $d(u_{n_0-1}, B) \leq d(u_{n_0-1}, u_{n_0}) + d(u_{n_0}, B)$ par l'inégalité triangulaire on déduit que

$$d(u_{n_0}, B) \geq d(u_{n_0-1}, B) - d(u_{n_0-1}, u_{n_0}) \geq 2\delta - \delta = \delta.$$

Finalement, $u_{n_0} \notin B'$ et donc $u_{n_0} \in K$. Ceci étant vrai pour tout $N \geq N_0$, on a une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans K qui est compact donc admet une valeur d'adhérence v dans K. C'est absurde car v est aussi une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui n'appartient alors pas à Γ. $\square$

Preuve de l'application : L'implication directe est claire.
Montrons la réciproque. Comme $[0, 1]$ est compact on sait que la suite admet une valeur d'adhérence, il faut et il suffit donc de montrer qu'elle est unique. Par l'absurde, supposons que ce n'est pas le cas. On se donne alors $a \neq b$ deux valeurs d'adhérence distinctes. Avec le théorème précédent on sait que $[a, b] \subset \Gamma$.
Tout élément $l \in [a, b]$ est point fixe de f. En effet, comme l est valeur d'adhérence on peut se donner une extractrice φ telle que $u_{\varphi(n)} \to l$. Comme f est continue, $f(u_{\varphi(n)}) = u_{\varphi(n)+1} \to f(l)$ et par hypothèse $u_{\varphi(n)+1} - u_{\varphi(n)} \to 0 = f(l) - l$ par unicité de la limite. Comme $\dfrac{a+b}{2}$ est dans Γ il existe nécessairement

$u_{n_0} \in [a,b]$. Mais alors $u_{n_0+1} = f(u_{n_0}) = u_{n_0}$ etc. donc $u_n = u_{n_0}$ pour tout $n \geq n_0$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u_{n_0}, absurde. $\square$

Pré-requis importants : Il faut :

- absolument faire des dessins au tableau pour A', B' et K !! Ils ne sont pas fait ici car j'avoue avoir un peu la flemme de les coder en latex, mais c'est primordial !
- savoir démontrer que $\Gamma = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{A_p}$ dans le début de la preuve du théorème
- être au point sur les distances à un compact/fermé
- bien comprendre la construction du terme u_{n_0} et la raison de sa présence dans K, c'est l'essence même de la preuve.